УДК 519.6

ОПТИМІЗАЦІЯ КІЛЬКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ У МЕТОДІ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЕКЦІЙ

О.М. Литвин,д.ф.-м.н., професор
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net
О.Г. Литвин, к.ф.-м. н., професор
Харківський національний університет радіоелектроніки
litvinog@ukr.net

Досліджується метод розв'язання задачі реконструкції зображень на основі використання скінченних сум Фур'є, запропонований автором Литвин О. М., в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Отримано співвідношення між порядком сум Фур'є, кількістю проекцій та точністю відновлення функції.

Litvin O.M., Litvin O.G .Optimizing the number of experimental data in the method of calculating Fourier coefficients using projections.We study the method of solving the problem of image reconstruction based on the use of finite Fourier sums proposed by the author O.M. Litvin, where the Fourier coefficients are calculated using projections coming from the computer tomograph. Correlations between order Fourier sums, the number of projections and accurate restoration of function are given.

Ключові слова: РЕКОНСТРУКЦІЯ, ЗОБРАЖЕННЯ, СУМА ФУР'Є.

Keywords: RECONSTRUCTION, IMAGE, SUMFOURIER

1. Обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проекцій методом О.М. Литвина [1–3].

Задача реконструкції зображень полягає у відновленні функції $f(x,y)$ за відомими проекційними даними - значеннями інтегралів γ_μ вздовж прямих L_μ, які перетинають об'єкт дослідження:

$$\int_{L_\mu} f(x,y)dl = \gamma_\mu,\ \mu = \overline{1,Q}, \qquad (1)$$

Надалі будемо вважати, що об'єкт дослідження належить квадрату $D = [0,1]^2$. Цю задачу можна інтерпретувати як задачу відновлення функції $f(x,y)$ – коефіцієнта поглинання рентгенівських променів або як задачу дослідження щільності $f(x,y)$ всередині деякого тіла на площині Oxy методами рентгенівської комп'ютерної томографії. Проекційні дані, які є експериментальними даними, надходять з комп'ютерного томографа.

Згідно з досліджуваним методом розв'язок задачі відшукувався у вигляді суми Фур'є.

$$f(x,y) \approx S_{N,N}(x,y) = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=-N}^{N} F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \qquad (2)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$F_{k,l} = \iint_D f(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dxdy$$

Особливістю і перевагою розробленого методу є те, що знайдено явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних через значення проекцій. Це звело розв'язання задачі до обчислення інтегралів. Вибір системи прямих, вздовж яких задаються проекційні дані, а отже, і вигляд інтегралів, і вигляд формул для їх обчислення, обумовлений значеннями індексів k та l у сумі Фур'є. Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$ за допомогою проекцій розглядалися окремо випадки щодо знаків k та l та їх взаємного розташування.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$ за допомогою проекцій розглядаємо окремо випадки щодо знаків k та l. Зокрема, для випадку $k > 0$ і $l > 0$ робимо вказану заміну змінних $kx+ly=t$, $-lx+ky=v$, звідки $x=x(t,v)=\dfrac{kt-lv}{k^2+l^2}$, $y=y(t,v)=\dfrac{lt+kv}{k^2+l^2}$. У результаті область інтегрування D розіб'ється на три під області D_1, D_2, D_3, коли $k>l$ або $k<l$, та на дві підобласті D_1, та D_3, якщо $k=l$. Тоді

$$F_{k,l}=I_1+I_2+I_3,$$

де, наприклад, інтеграл I_1 по області D_1 для випадку, коли $k>l>0$, зводиться до вигляду:

$$I_1=\iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)e^{-i2\pi t}\left|J\right|dtdv=$$

$$=\int\limits_0^l \frac{e^{-i2\pi t}dt}{k^2+l^2}\int\limits_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv.$$

Аналогічно визначаються інтеграли I_2, I_3.

2. Чисельна реалізація методу.

В основі чисельної реалізації запропонованого методу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є лежить заміна під знаком інтеграла періодичної експоненціальної функції $e^{-i2\pi t}$ кусково-сталим періодичним сплайном

$$e^{-i2\pi t}=\cos 2\pi t-i\sin 2\pi t\approx Cp(m,2\pi t)-iSp(m,2\pi t).$$

У цій формулі m – кількість інтервалів розбиття чверть періоду функцій $\cos 2\pi t$ та $\sin 2\pi t$ на підінтервали, в яких відповідні періодичні функції $\cos 2\pi t$ та $\sin 2\pi t$ замінюються сталою величиною найкращого рівномірного наближення вказаних функцій.

Наводимо оцінку похибки, яка при цьому виникає.

$$\left|\cos(2\pi t)-Cp(m,2\pi t)\right|\le 0.5m^{-1},$$

$$\left|\sin(2\pi t)-Sp(m,2\pi t)\right|\le 0.5m^{-1}.$$

Тоді інтеграл I_1 замінюється інтегралом

$$\tilde{I}_1 = \iint_{D_1} f(x(t,v),y(t,v)) \cdot (Cp(m,2\pi t) - iSp(m,2\pi t)) \cdot |J| \cdot dtdv.$$

Аналогічно інтеграли I_2, I_3 замінюються інтегралами $\tilde{I}_2, \tilde{I}_3$. Тобто $F_{k,l} \approx \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 = \tilde{I}$.

Вважаємо, що при кожному фіксованому $t = t_\mu$ інтеграли по змінній v є проекціями.

$$\gamma_\mu = \int_{-\frac{lt_\mu}{k}}^{\frac{lt_\mu}{k}} f(x(t_\mu, v), y(t_\mu, v))dv, \ \mu = \overline{1,Q}.$$

Аналогічно для інших інтегралів $\tilde{I}_2, \tilde{I}_3$.

Вважаємо, що загальна кількість проекцій, які надходять з комп'ютерного томографа дорівнює Q. Це означає, що вони є інтегралами вздовж прямих $kx + ly = t_\mu = (\mu - 0.5)h_{k,l},\ h_{k,l} = \dfrac{k+l}{Q},\ \mu = \overline{1,Q}$.

Обчислюємо $\tilde{I}$ за формулою центральних прямокутників за змінною t. Позначимо отриманий інтеграл через $I^*_{k,l} = \sum_{\mu=1}^{Q} \Big[\big[Cp(m, 2\pi t_\mu) - iSp(m, 2\pi t_\mu) \big] \gamma_\mu \Big] h_{k,l} |J|$.

При цьому виникає похибка $\left| \tilde{I} - I^*_{k,l} \right| = \varepsilon_1 = O(h^r_{k,l}),\ r = 1,2$.

3. Співвідношення між порядком N сум Фур'є диференційовних функцій та кількістю Q проекцій, необхідних для забезпечення потрібної точності.

Отже, загальна похибка, яка виникає при заміні $F_{k,l}$ числом $I^*_{k,l}$ визначається наступною нерівністю

$$\left| F_{k,l} - I^*_{k,l} \right| = \left| (F_{k,l} - \tilde{I}) + (\tilde{I} - I^*_{k,l}) \right| \le 0.5m^{-1} + \varepsilon_1 .$$

Використаємо наступну оцінку для похибки наближення функції [4]

$$f(x,y) \in C^r(D), r \ge 1, D = [0,1]^2 :$$

$$\max_{(x,y)\in D} \left| f(x,y) - S_N f(x,y) \right| = O(N^{-r}) .$$

Теорема. Між величинами m, Q та N справедливе співвідношення $N^{-r} = 0.5m^{-1} + \max\limits_{-N \le k,l \le N} h_{k,l} \dfrac{M_2}{24}$

Новизна даної розробки полягає у виборі порядку N суми Фур'є у залежності від кількості Q проекцій для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$.

Література

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / Системний аналіз, управління і інформаційні технологіїї: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125.–Харків: ХДПУ, 2000.–С. 27–35.
2. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів / Проблеми машинобудування. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 56–65.
3. Литвин О. М. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра / О. М. Литвин, О. Г. Литвин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10–12 берез. 2016 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2016.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. – 720 с.